Chap …. PROBABILITÉS

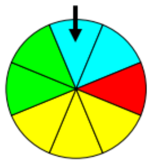
I) Expérience aléatoire :

1) Exemples :

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.

- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche



2) Définition :

Une **expérience** (lancé un dé par exemple) est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats (pile ou face) et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira .

Les résultats possibles d'une expérience s'appelle **des issues.**

Ex : On lance un dé à six faces (non pipé) et on regarde le nombre de points sur la face du dessus.
Les issues possibles sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 . 6.

II) Vocabulaire :

1) Événement :

Un événement est un ensemble d'éventualités.
Un évènement est constitué par plusieurs issues d'une même expérience aléatoire .

Ex : Lors du lancer de dé , on étudie l'événement « obtenir un nombre pair ».
Cet événement est réalisé par les issues : 2 ; 4 ; et 6.

2) **Un événement élémentaire est un événement réalisé par une seule issue.**

Ex :

- L'événement « obtenir un nombre pair » n'est donc pas un événement élémentaire car il est réalisé par 3 issues (2, 4, 6).
- « On obtient 3 » est un événement élémentaire car il est réalisé par la seule issue 3.

3) Deux événements sont **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent pas se produire simultanément.
Ex : « Obtenir un nombre pair » et « obtenir 3 » sont deux événements incompatibles.

4) **L'événement contraire** d'un événement est celui qui se réalise lorsque l'événement n'a pas lieu.

Ex : Lors du lancer de dé à 6 faces, on considère l'événement A « Obtenir un multiple de 3 ».
Il est réalisé par les issues 3 et 6.
L'événement contraire à A, noté $\overline{A}$ est « Ne pas obtenir un multiple de 3 ».
Il est réalisé par les issues 1, 2, 4, 5.

III) Notion de probabilité :

1) Lorsque l'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire (de façon indépendante et dans les mêmes conditions), **la fréquence de réalisation d'un événement, se rapproche d'un nombre que l'on appelle probabilité de cet événement.**

Ex : Soit A l'événement « j'obtiens pile au lancer d'une pièce de monnaie ».
La probabilité pour que A se réalise est $\frac{1}{2}$
On note : P(A) = $\frac{1}{2}$

2) Propriétés :

- **La probabilité** d'un évènement est un nombre **compris entre 0 et 1** qui exprime « la chance qu'a un évènement de se produire ».

  Ex :
  Dire que la probabilité d'un évènement est de 0,8 signifie que cet évènement a 8 chances sur 10 ou 80 % de chance de se produire.

- Un événement est **impossible** lorsqu'il ne peut pas se produire.
  La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.

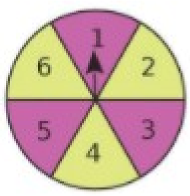
- Un événement est **certain** lorsqu'il se réalise toujours.
  La probabilité d'un événement certain est égale à 1.

- **La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.**

- **Soit A un événement, on note $\overline{A}$ son événement contraire.Nous avons** $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Exemple :

On tourne une roue bien équilibrée.



Notons l'événement A : <<sortie du chiffre 1>>

alors l'événement contraire $\overline{A}$ est : <<sortie d'un chiffre autre que 1>>.

On a : P(A) = $\frac{1}{6}$ P($\bar{A}$) = $\frac{5}{6}$

et :

P(A) + P($\bar{A}$) = $\frac{1}{6}$ + $\frac{5}{6}$ = 1.

IV) Équiprobabilité :

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisés, on dit qu'il y a **équiprobabilité.**

Propriété :

Dans une situation d'équiprobabilité, **la probabilité d'un événement est égale au quotient du nombre d'issues favorables par le nombre d'issues possibles.**

Probabilité d'un événement A = $\dfrac{nombre\ d'issues\ favorables\ à\ A}{nombre\ total\ d'issues}$

Exemple:

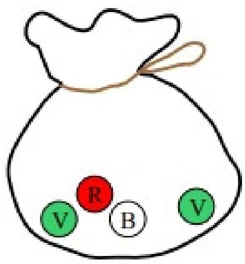
On lance un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité de l'événement A « obtenir un multiple de 3 ou de 5 » ?

A est réalisé par les issues 3 , 5 ou 6 et la situation étant équiprobable, chaque face a 1 chance sur 6 de sortir.

Donc P(A) = $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

V) Exemples :

1) L'expérience consiste à tirer une bille dans un sac contenant 2 billes vertes, une bille rouge et une bille blanche.



- Quelles sont les issues possibles : bille verte - bille rouge - bille blanche
- Quels sont les événements élémentaires et déterminer leur probabilité: (vérifiez que leur somme fait 1)

  A = «obtenir une bille verte» P(A) = $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ (2 chances sur 4)

  B = «obtenir une bille rouge» P(B) = $\dfrac{1}{4}$ (1 chance sur 4)

  C = «obtenir une bille blanche» P(C) = $\dfrac{1}{4}$ (1 chance sur 4)

  Somme des événements élémentaires : $\dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

- Sommes nous dans une situation d'équiprobabilité ? : Non car les événements élémentaires n'ont pas le même probabilité
- Donnez un événement certain : D = «obtenir une bille ronde»
- Donnez un événement impossible : E = «obtenir une bille noire»
- Déterminez la probabilité de l'événement F = «ne pas tirer la bille blanche »: Cet événement est réalisé par les issues « tirer une boule R ou V » C'est l'événement contraire à « tirer une boule blanche » donc P(non blanche) = P(R) + P(V) = $\dfrac{3}{4}$ ou P(non blanche) = 1 – P(B) = 1 - $\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

2) On fait tourner une roue équilibrée et on relève le numéro du secteur qui s'arrête en face du repère.

a) Quelle est la probabilité de sortie du numéro 2?

P(2) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) Calculer P(1) et P(3) :

P(1) = $\frac{1}{6}$ et P(3) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Remarque : P(1) + P(2) + P(3) = $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6}$ = 1.

c) Soit l'événement S « sortir un nombre supérieur ou égal à 2 ».
S est réalisé par les issues 2et 3.

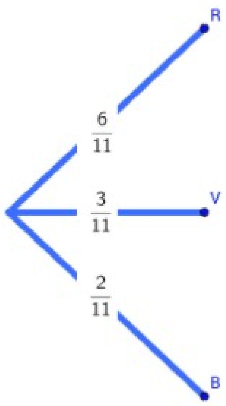
P(S) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

On a : P(S) = P(2) + P(3)

<u>VI) Arbre des probabilités :</u>

On peut représenter toutes les issues d'une expérience aléatoire dans **un "arbre des probabilités"** (Si on écrit sur chaque branche la probabilité d'obtenir chaque issue, on dit que l'arbre est pondéré).

Ex : On tire une boule dans un sac, contenant 3 boules vertes, 2 boules blanches et 6 boules rouges et on regarde la couleur obtenue.
On peut représenter la situation par un arbre de probabilités.



Il y a 3 + 2 + 6 = 11 boules au total

P(R) = $\frac{6}{11}$

P(V) = $\frac{3}{11}$

P(B) = $\frac{2}{11}$

VII) Expérience à deux épreuves :

Dans un arbre de probabilités, **la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités des branches conduisant à cette issue.**

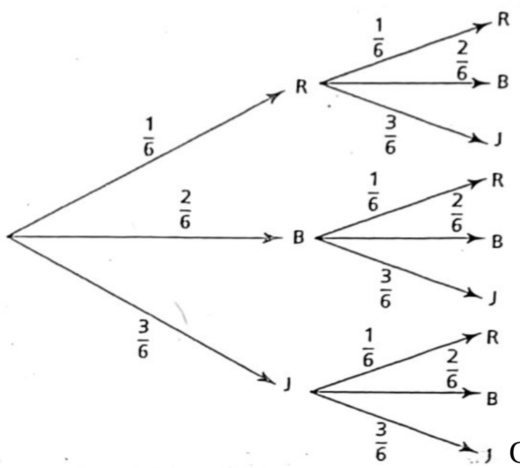
Exemples :

1) On lance à deux reprises un dé dont une face est rouge, deux faces sont bleues et trois faces sont jaunes.

a) La probabilité d'obtenir « Jaune - jaune » est :

P(J-J) = $\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

b) La probabilité d'obtenir Rouge puis Bleue est P(R -B) = $\frac{1}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$



Chemin correspondant à l'événement «obtenir rouge puis bleue »

Chemin correspondant à l'événement »obtenir jaune -jaune ».

2) On dispose dans une urne de 3 boules rouges et 7 boules bleues.

On effectue un premier tirage, puis un second sans replacer la première boule.

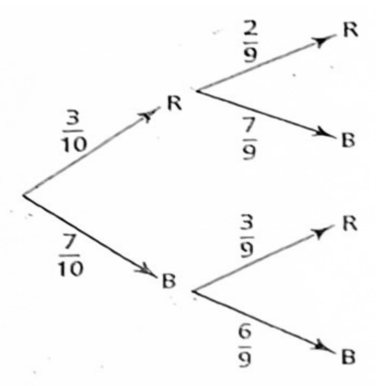
Soit R l'événement « tirer une boule rouge » et B l'événement « tirer une boule bleue ».

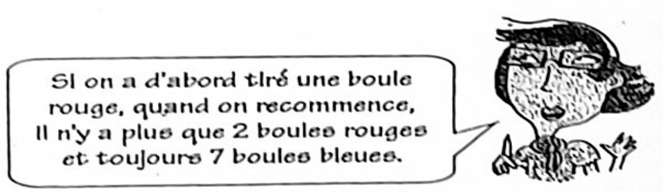
Au premier tirage, il y a 3 + 7 = 10 boules.

P(R) = $\frac{3}{10}$ et P(B) = $\frac{7}{10}$

Au second tirage, il n'y a plus que 9 boules (puisqu'on ne replace pas la première)

On obtient l'arbre de probabilités suivant :





La probabilité de tirer deux boules rouges est :

P(R-R) = $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ et $\frac{1}{15} \approx 0{,}07$ donc la probabilité de tirer deux boules rouges est environ de 7 %.